가우스상사이중투영법(Gauss Conformal Double Projection) 계산식

TM 투영법중 등각투영법의 하나인 가우스相似二重투영법(가우스이중투영법. Gauss−Schreiber 투영법. ガウスの等角二重投影法. ガウス正角二重投影法)은 1910년대 일제에 의해 우리나라 측량에 도입된 이후 지금까지도 지적측량에 사용되고 있는 투영식이나 현재 일반적으로 사용되는 가우스크뤼거투영법에 비하여 그 구체적인 계산방법을 알려주는 자료는 매우 드물다.
또한 이들 참고서적들도, 대다수는, 타원체상의 경위도 좌표를 평면상의 직각좌표로 환산하는 방법만 서술하고 있을 뿐, 역으로 직각좌표에서 타원체상의 경위도좌표로 바꾸는 법은 생략하고 있다.
아래 참고서적(논문)들 중, 2가지만 양쪽 변환식을 서술하고 있는 데, 이 중 양철수의 논문을 주로 참고하여 관련 산식을 정리한다(아래 한글 논문들은 모두 다, 오탈자가 상당히 많아 일일이 교정하며 보아야 했다).
구체적인 유도과정은 생략하고 관련 산식만 정리한다.

1. 순(順)변환(경위도에서 직각좌표로) − 대부분의 관련 자료들은 순변환만 기술하고 있다

※ 타원체에 관한 공식(괄호안의 수치는 베셀타원체 기준값)

a = 타원체의 장반경 (6377397.155m)

f = 타원체의 편평율 ($\frac{1}{299.1528128}$ − 공공측량의작업규정세부기준운용세칙 182조)

b = 타원체의 단반경 = 6356078.96281819m

e = 타원체의 제1이심율

e' = 타원체의 제2이심율

n = 타원체의 제3이심율

$$f = \frac{a-b}{a} = 0.00334277318217481$$

$$\frac{b}{a} = 1-f = \sqrt{1-e^2} = \frac{1-n}{1+n} = 0.996657226817825$$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1+e'^2} = f(2-f) = \frac{4n}{(1+n)^2} = 0.00667437223180214$$

$$e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = 0.0816968312225275$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2} = \frac{f(2-f)}{(1-f)^2} = \frac{4n}{(1-n)^2} = 0.00671921879917476$$

$$e' = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}} = 0.0819708411520509$$

$$n = \frac{a-b}{a+b} = = \frac{f}{2-f} = 0.00167418480111499$$

① 타원체면 위의 점 (ϕ, λ)가 구체면 위에 투영된 점 $(\overline{\phi}, \overline{\lambda})$는 다음과 같이 구해진다.

ϕ = 위도(北이 +)

λ = 경도(東이 +)

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\overline{\phi}}{2}\right) = K\cdot\left[\left(\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}\right)\cdot\left(\frac{1-esin\phi}{1+esin\phi}\right)^{e}\right]^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\overline{\lambda} = \alpha(\lambda-\lambda_0)$$

$$\sin(\overline{\phi}_0) = \frac{1}{\alpha}\cdot\sin(\phi_0)$$

단, ϕ_0 = 타원체면 위의, 투영 원점의 위도(= 38°),

λ_0 = 투영원점의 경도(125 or 127 or 129°)

$\overline{\phi}_0 = 0.662215367540301$ (rad) = 37.9421456887639 (deg)

$$K = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\overline{\phi}_0}{2}\right)\cdot\left[\left(\frac{1-\sin\phi_0}{1+\sin\phi_0}\right)\cdot\left(\frac{1+esin\phi_0}{1-esin\phi_0}\right)^{e}\right]^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 1.00190937630678$$

$$\alpha = \sqrt{1+e'^2\cos^4\phi_0} = 1.00129460218561$$

② 구체면 위의 투영점 $(\overline{\phi}, \overline{\lambda})$에서 평면직각좌표 (x, y) 계산

x = 원점에서 北向 값
y = 원점에서 東向 값

$$x = R\cdot\left[\tan^{-1}(\tan\overline{\phi}\cdot\sec\overline{\lambda}) - \overline{\phi}_0\right]$$

$$y = R\cdot\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin^{-1}(\cos\overline{\phi}\cdot\sin\overline{\lambda})\right)\right]$$

단, ln = 자연로그

$$R = \text{타원체 위 투영원점의 평균곡률반경} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2\phi_0} = 6372199.65762383 \text{ (m)}$$

[계산 예]
베셀타원체 기준, 원점 좌표가 (38°, 129°)일 때,
34°50′56.7549″N, 128°41°34.1968″E의 직각좌표는,
x = −349565.7799(m)
y = −28088.8515(m)

2. 역(逆)변환(직각좌표를 경위도로)

① 평면직각좌표 (x, y) 에서 구면상의 경위도 $(\overline{\phi}, \overline{\lambda})$ 구하기

$\sin^2\overline{\phi} = \dfrac{q_1^2(1-q_2^2)}{1+q_1^2}$에서 $\overline{\phi}$를 구한다.

단, $q_1 = \tan(\dfrac{x}{R} + \overline{\phi}_0)$

$q_2 = \sin\left[2\cdot\tan^{-1}\left(\exp\left(\dfrac{y}{R}\right)\right) - \dfrac{\pi}{2}\right]$

(여기서, exp는 오일러 상수(~2.718281828459045235360287)의 거듭제곱을 의미함)

또한,

$q_1 = \tan\overline{\phi}\cdot\sec\overline{\lambda}$ 또는 $q_2 = \cos\overline{\phi}\cdot\sin\overline{\lambda}$에서 $\overline{\lambda}$를 구한다

② 구면상의 경위도 $(\overline{\phi}, \overline{\lambda})$ 에서 타원체면 위의 점 (ϕ, λ) 구하기

$\lambda = \dfrac{1}{\alpha}(\overline{\lambda}) + \lambda_0$

λ는 쉽게 구해지나, ϕ는 축차근사법으로 구하는 수 밖에 없다.

$S = \left[\dfrac{1}{K}\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\overline{\phi}}{2}\right)\right]^{\left(\frac{2}{\alpha}\right)}$라 하고,

$Q_{i+1} = S\cdot\left[\dfrac{Q_i\cdot(1+e) + (1-e)}{Q_i\cdot(1-e) + (1+e)}\right]^e$ 에서,

Q_{i+1}과 Q_i의 값 차이가 없을 때까지(통상적으로는 $5 \sim 6$회 정도)계산을 반복한다

단, $Q_1 = \dfrac{(1+\sin\overline{\phi})}{(1-\sin\overline{\phi})}$

최종적으로 구해진 Q를 가지고,

$\sin\phi = \dfrac{(Q-1)}{(Q+1)}$ 에서 ϕ를 구한다.

[계산 예]

베셀타원체 기준, 원점 좌표가 (38°, 129°)일 때,

$x = -349565.7799$(m)

$y = -28088.8515$(m)에서 경위도 좌표를 구하면,

$S = 3.6386598943111$

$Q_1 = 3.6586809733848$

최종적인 $Q = 3.666540964366$

$\sin\phi = 0.57141702702881$

$\therefore \phi = 0.60823151162476\,(rad) = 34.849098583\,(\deg) = 34°50'56.7549''$N

$\overline{\lambda} = -0.005368025675318\,(rad)$에서

$\therefore \lambda = 128.69283244428\,(\deg) = 128°41'34.1968''$E

※ 추기
위의 변환식은 정확한 것이나, 이전의 지적측량 시행규칙(국토교통부령 제64호, 2014. 1. 17. 지금은 폐지되었음) 별지 제18호 서식((x, y)를 경위도로), 별지 제19호 서식(경위도를 (x, y)로)에 가우스상사이중투영법에 의한 산식을 싣고 있으나 엄밀한 식이 아닌 근사식이어서 상호간 값이 정확히 일치하진 않으므로 참고로만 하여야 한다(식中 기호 오타도 있음).

[참고서적]

"가우스크뤼그투영계산과 가우스상사이중투영계산의 좌표 비교", 지적 제39권 제1호, 2009, 양철수
"가우스이중투영과 가우스크뤼게투영법에 대한 연구", 한국측지학회지 제16권 제2호, 전재홍, 조규전, 1998
"대지측량에 있어서 투영법에 의한 좌표변환의 연구", 대한토목학회논문집 제5권 제2호, 1985, 최철순
"세계측지계 기반 지적측량성과의 평면투영 좌표체계 연구", 대한지적공사 공간정보연구원, 2014
"수치시험을 통한 횡원통 상사 투영함수 비교 연구", 한국측량학회지 제31권 제2호, 이흥규, 서완수, 2013
"旧平面直角座標系の計算" (pdf 파일, 일본어)

THE GAUSS-KRÜGER PROJECTION, R. E. Deakin, M. N. Hunter, C. F. F. Karney, Presented at the Victorian Regional Survey Conference, Warrnambool, 10−12 September, 2010 (pdf 파일)
https://www.researchgate.net/publication/267723012_A_FRESH_LOOK_AT_THE_UTM_PROJECTION_Karney-Krueger_equations

※(별법 1) 타원체면 위의 점 (ϕ, λ)가 구체면 위에 투영된 점 $(\overline{\phi}, \overline{\lambda})$를 구하는 다른 식-

일본 위키 "等角写像" 항의 식(2019.2.23. 현재)

(구데르만 함수의 정의)

$$gd(z) = \sin^{-1}\tanh(z) = \sec^{-1}\cosh(z) = \tan^{-1}\sinh(z)$$

$$gd^{-1}(z) = \tanh^{-1}\sin(z) = \cosh^{-1}\sec(z) = \sinh^{-1}\tan(z)$$

$$\overline{\phi} = gd\left[\alpha\cdot\left\{gd^{-1}(\phi) - gd^{-1}(\phi_0) - e\cdot\tanh^{-1}(e\cdot\sin\phi) + e\cdot\tanh^{-1}(e\cdot\sin\phi_0)\right\} + \tanh^{-1}\left(\frac{\sin\phi_0}{\alpha}\right)\right]$$

$$\overline{\lambda} = \alpha(\lambda - \lambda_0)$$

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{e^2\cdot\cos^4\phi_0}{1 - e^2}}$$

※ (별법 2) "旧平面直角座標系の計算"에 의한 방법 - 순변환의 경우만

① 타원체면 위의 점 (ϕ, λ)가 구체면 위에 투영된 점 $(\overline{\phi}, \overline{\lambda})$는 다음과 같이 구해진다.

$$\overline{\phi} = 2 \cdot \tan^{-1}\left[K \cdot \left(\frac{1 - e \cdot \sin\phi}{1 + e \cdot \sin\phi}\right)^{\frac{\alpha e}{2}} \cdot \tan^{\alpha}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right] - \frac{\pi}{2}$$

$$\overline{\lambda} = \alpha(\lambda - \lambda_0)$$

$$\alpha^2 = 1 + e'^2 \cdot \cos^4\phi_0$$

$U_0 = \sin^{-1}\left(\frac{\sin\phi_0}{\alpha}\right)$: 구체위 투영원점의 위도

$$K = \left[\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{U_0}{2}\right)}{\left\{\left(\frac{1 - e \cdot \sin\phi_0}{1 + e \cdot \sin\phi_0}\right)^{\frac{\alpha e}{2}} \cdot \tan^{\alpha}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2}\right)\right\}}\right]$$ ※ 원문의 수식은 오류(ln 없어야 함)

(계산 예)
베셀타원체 기준, 원점 좌표가 (38°, 127°)일 때,
타원체상 좌표가 37°25′30.53206″N, 126°51°59.43005″E인 경우,

$\phi_0 = 0.66322511575845\,(rad)$

$\lambda_0 = 2.2165681500328\,(rad)$

$\phi = 0.653192052058549\,(rad)$

$\lambda = 2.2142382811679\,(rad)$

$e'^2 = 0.00671921879917466$

$e = 0.0816968312225275$

$\alpha^2 = 1.00259088036604$

$\alpha = 1.00129460218561$

$U_0 = 0.662215367540301$ (rad)

$K = 1.00190937630679$

$\overline{\phi} = 0.652203657691311\,(rad)$

$\overline{\lambda} = -0.00233288511822607\,(rad)$

② 구체면 위에 투영된 점 $(\overline{\phi}, \overline{\lambda})$에서 구체면상의 직각좌표 (X, Y)는 다음과 같이 구해진다.

$$X = \tan^{-1}\left(\frac{\tan\overline{\phi}}{\cos\overline{\lambda}}\right) - U_0 = -0.0100103972500607$$

$$Y = \sin^{-1}(\cos\overline{\phi} \cdot \sin\overline{\lambda}) = -0.0018540557293601$$

③ 최종적으로 구체면상의 직각좌표 $(X,\, Y)$ 에서 평면상의 직각좌표 (x,y)는 다음과 같이 구해진다.

$R =$ 타원체상 투영 원점에서 곡률반경 $= \dfrac{a\cdot\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\cdot\sin^2\phi_0} =$ 6372199.65762383 (m)

$y = R\cdot\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{Y}{2}\right)\right] = -11814.42005\,(m)$

$x = R\cdot X = -63788.24993\,(m)$

신용득, 2019.2.23. 작성